

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων  
Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού,**

**Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**

Ημερομηνία: **11 Ιουνίου 2018**

**Απαντήσεις Θεμάτων**

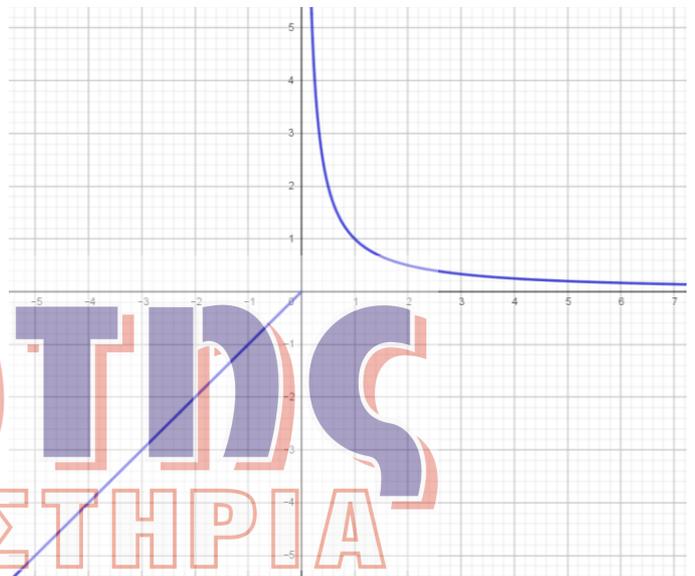
**Θέμα Α**

**A.1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου, απόδειξη **σελίδα 99.**

**A.2.**

- α) Ψευδής.
- β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35: Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως η

$$\text{συνάρτηση: } g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



**A.3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου, Θεώρημα **σελίδα 216.**

**A.4.**

- α) **Λάθος**
- β) **Λάθος**
- γ) **Σωστό**
- δ) **Σωστό**
- ε) **Σωστό**

**Θέμα Β**

**B1.** Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} - \{0\}$  ως πράξεις μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = (x)' - \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 1 - 4\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3}, \quad x \neq 0$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} > -1$$

$$\frac{8}{x^3} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{8 + x^3}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 + 8) > 0$$

$x^3(x + 2)(x^2 - 2x + 4) > 0$  και το  $x^2 - 2x + 4$  έχει  $\Delta < 0$  συνεπώς  $x^2 - 2x + 4 > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Επομένως, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων:

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$x^3$	-	-	○	+
$x + 2$	-	○	+	+
$x^2 - 2x + 4$	+	+	+	+
ΓΙΝ	+	○	-	+

Τελικά  $f'(x) > 0$  για  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) < 0$  για  $x \in (-2, 0)$  και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας + ακροτάτων:

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Άρα, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα:  $(-\infty, -2]$ ,  $(0, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-2, 0)$ . Επίσης, παρουσιάζει στη θέση  $x = -2$ , τοπικό μέγιστο το  $f(-2) = -3$ .

**B2.** Η  $f'$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} - \{0\}$  ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f''(x) = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = -\frac{24}{x^4} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Άρα η  $f$  είναι κοίλη στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής στο  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''$	-		-
$f$			

**B3.** Ελέγχουμε την  $f$  για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο  $x = 0$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 4 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot (+\infty) = -\infty$$

αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$  και  $x^2 > 0$  για κάθε  $x \neq 0$  κοντά στο  $0$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 4 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot (+\infty) = -\infty$$

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$  και  $x^2 > 0$  για κάθε  $x \neq 0$  κοντά στο  $0$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Οπότε η  $x = 0$  είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

Ελέγχουμε την  $f$  για ασύμπτωτες στα  $-\infty$  και  $+\infty$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 - 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \beta \end{aligned}$$

Άρα η  $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{x^2} = -4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \beta$$

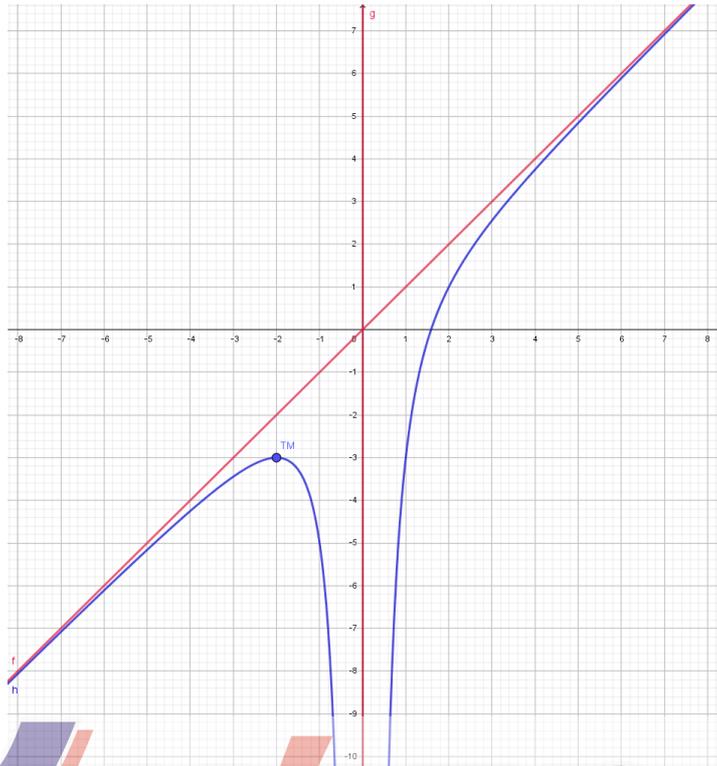
Άρα η  $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

Οπότε η  $C_f$  δεν παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  ή στο  $+\infty$  εφόσον παρουσιάζει πλάγια.

**β τρόπος για τις πλάγιες ασύμπτωτες:**

Είναι:  $f(x) - x = -\frac{4}{x^2}$ . Επειδή:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$  θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0$ , οπότε η  $y = x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ .

**B4.** Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει η γραφική παράσταση:



### Θέμα Γ

**Γ1.** Η πλευρά του τετραγώνου είναι  $a = \frac{x}{4} m$  και το εμβαδόν του  $E_1(x) = \frac{x^2}{16}$ ,  $x \in (0,8)$ .

Το μήκος του κύκλου είναι  $8 - x m$ , άρα για την ακτίνα του ισχύει  $2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi} m$  και το εμβαδόν του

$$E_2(x) = \pi \left( \frac{8-x}{2\pi} \right)^2 = \pi \frac{64 - 16x + x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi}, \quad x \in (0,8)$$

$$\text{Επομένως, } E(x) = \frac{\pi x^2 + 4x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$

**Γ2.** Η  $E$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,8)$  με

$$E'(x) = \frac{2(\pi + 4)x - 64}{16\pi}, \quad x \in (0,8)$$

Θέτουμε:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi + 4}$$

και προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας - ακροτάτων:

$x$	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$		○ -	+
$E(x)$		↘	↗

ολ. ελαχ.

Συνεπώς η  $E$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x = \frac{32}{\pi+4}$  m. Για την τιμή αυτή ισχύει  $\alpha = \frac{8}{\pi+4}$  m και

$$\delta = 2\rho = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8(\pi+4) - 32}{\pi(\pi+4)} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4} \text{ m}$$

Τελικά, για  $x = \frac{32}{\pi+4}$  m η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

**Γ3.** Έχουμε ότι :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi}$

- $\lim_{x \rightarrow 8^-} E(x) = 4$

- $$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4) \cdot \frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64 \cdot \frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} =$$

$$= \frac{32^2 - 64 \cdot 32 + 256(\pi+4)}{16\pi(\pi+4)} = \frac{16[64 - 128 + 16(\pi+4)]}{16\pi(\pi+4)} =$$

$$= \frac{-64 + 16\pi + 64}{\pi(\pi+4)} = \frac{16\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{16}{\pi+4}$$

Επειδή η  $E$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ ,

ισχύει  $E(\Delta_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$ .

Επειδή η  $E$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ ,

ισχύει  $E(\Delta_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$ .

Αφού  $\frac{16}{\pi} > 5$ , ισχύει  $5 \in E(\Delta_1)$  και η εξίσωση  $E(x) = 5$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\Delta_1$  επειδή η  $E$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1$ .

Αφού  $5 \notin E(\Delta_2)$ , η εξίσωση  $E(x) = 5$  δεν έχει ρίζα στο  $\Delta_2$ .

Άρα, υπάρχει ένας μόνο τρόπος ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με  $5m^2$ .

## Θέμα Δ

**Δ1.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 2e^{x-a} - 2x = 2(e^{x-a} - x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f''(x) = 2(e^{x-a} - 1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} < e^0 \Leftrightarrow x - a < 0 \Leftrightarrow x < a$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$$

Επειδή η  $f''$  αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της θέσης  $x = a$  και ορίζεται εφαπτομένη της  $C_f$  στη θέση αυτή το  $K(a, f(a))$  δηλαδή το  $K(a, 2 - a^2)$  είναι σημείο καμπής της  $C_f$

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f(x)$			

**Δ2.** Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta_1 = (-\infty, a]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta_2 = [a, +\infty)$ .

Επειδή η  $f'$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ισχύουν:  $f'(\Delta_1) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)) = [2 - 2a, +\infty)$

και  $f'(\Delta_2) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)) = [2 - 2a, +\infty)$ ,

αφού:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-a} - 2x) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{x-a} \left( 1 - \frac{x}{e^{x-a}} \right) \right) = +\infty$ , εφόσον:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-a}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-a}} = 0, \text{ με χρήση του κανόνα } D.L.H. \text{ για απροσδιόριστη μορφή } \left\langle \frac{+\infty}{+\infty} \right\rangle.$$

Επειδή  $0 \in f'(\Delta_1)$  και  $0 \in f'(\Delta_2)$  υπάρχουν μοναδικοί  $x_1 \in (-\infty, a)$  και  $x_2 \in (a, +\infty)$  τέτοιοι ώστε να ισχύει  $f'(x_1) = 0$  και  $f'(x_2) = 0$  αφού η  $f'$  είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ .

Για κάθε  $x < x_1$  ισχύει  $f'(x) > f'(x_1)$  και  $f'(x) > 0$

Για κάθε  $x_1 < x < a$  ισχύει  $f'(x_1) > f'(x)$  και  $f'(x) < 0$

Οπότε η  $f$  παρουσιάζει στη θέση  $x_1$  τοπικό μέγιστο το  $f(x_1)$  όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Για κάθε  $a < x < x_2$  ισχύει  $f'(x) < f'(x_2)$  και  $f'(x) < 0$

Για κάθε  $x > x_2$  ισχύει  $f'(x) > f'(x_2)$  και  $f'(x) > 0$

Οπότε η  $f(x_2)$  όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$x_1$	$1$	$a$	$x_2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+	
$f(x)$	↗		↘		↗	

Τοπικό Μέγιστο
Τοπικό Ελάχιστο

**Δ3.** Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta = [a, x_2]$ , οπότε:

$$f(\Delta) = [f(x_2), f(a)] = [f(x_2), 2 - a^2]$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $f(1) \notin f(\Delta)$ , δηλαδή:  $f(1) > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $h(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$ , με  $x \geq 1$  και  $h(1) = 0$ .

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, +\infty)$  με  $h'(x) = -2e^{1-x} + 2x$ .

Για κάθε  $x > 1$  ισχύει:  $-x < -1 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < 1$ , εφόσον η  $e^x$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:  $-2e^{1-x} > -2 \Leftrightarrow -2e^{1-x} + 2x > 2x - 2$

Οπότε:  $h'(x) > 2(x - 1) > 0$ , για κάθε  $x > 1$ .

Άρα, η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$  και η  $x = 1$  είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $h(x) = 0$ . Για κάθε  $x > 1 \Leftrightarrow h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$ .

Άρα  $h(a) > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$ , για κάθε  $a > 1$ .

**β' τρόπος:**

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in (a, x_2)$  τέτοιο ώστε να ισχύει:  $f(x_0) = f(1)$  τότε από εφαρμογή του Θ. Rolle για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $(1, x_0)$  εξασφαλίζουμε ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, x_0)$  ώστε να ισχύει:  $f'(\xi) = 0$ , το οποίο είναι άτοπο γιατί ισχύει παρακάτω διάταξη:  $x_1 < 1 < a < \xi < x_0 < x_2$ .

Απόδειξη του ισχυρισμού  $x_1 < 1$ , αφού η ανίσωση:  $\xi < x_0 < x_2$  είναι προφανής.

Ισχύουν:  $f'(x_1) = 0$  και  $f'(1) = 2(e^{1-a} - 1) < 0$ , αφού  $a > 1$ .

Άρα, έχουμε:  $f'(x_1) > f'(1)$  και εφόσον  $f'$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, a)$  ισχύει:  $x_1 < 1$ .

**Δ4.** Για  $a = 2$  ισχύει  $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της  $C_f$  στο σημείο  $K(2, -2)$  έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2), \text{ όπου } f(2) = -2 \text{ και } f'(2) = -2$$

$$(\varepsilon): y + 2 = -2(x - 2)$$

$$(\varepsilon): y = -2x + 2$$

Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $[2, +\infty)$  η εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  της  $C_f$  στο σημείο  $K$  βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής τους  $K$ .

Επομένως ισχύει  $f(x) \geq -2x + 2$  για κάθε  $x \geq 2$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 2$ .

Άρα ισχύει  $f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2}$  αφού  $x \geq 2$ , με το « $\Rightarrow$ » να ισχύει μόνο για  $x = 2$ .

$$\text{οπότε } \int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} \, dx > \int_2^3 (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2} \, dx$$

$$\text{Έστω } I = \int_2^3 (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2} \, dx$$

$$u = \sqrt{x-2}, x-2 = u^2, dx = 2u \, du$$

$$x = 2, u = 0 \text{ και } x = 3, u = 1$$

Άρα:

$$I = \int_0^1 [-2(u^2 + 2) + 2] \cdot u \cdot 2u \, du$$

$$I = -4 \int_0^1 (u^4 + u^2) \, du$$

$$I = -4 \left[ \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right]_0^1$$

$$I = -4 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{-32}{15}$$

οπότε ισχύει:

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} \, dx > \frac{-32}{15}$$